

WIADOMOŚCI STATYSTYCZNE

CZASOPISMO GŁÓWNEGO URZĘDU STATYSTYCZNEGO
I POLSKIEGO TOWARZYSTWA STATYSTYCZNEGO

STUDIA METODOLOGICZNE

Tomasz PANEK

Wskaźniki ubóstwa w ujęciu wielowymiarowym¹

W prowadzonych do lat siedemdziesiątych badaniach zjawiska ubóstwa dominowało podejście klasyczne, opierające się na wskaźnikach monetarnych. W podejściu tym ocena poziomu zaspokojenia potrzeb odbywała się wyłącznie przez pryzmat bieżących dochodów (wydatków) gospodarstw domowych. Stopniowo jednak coraz więcej zwolenników zaczął zyskiwać pogląd, że identyfikacja ubogich jedynie na podstawie kategorii bieżącego dochodu jest dalece niewystarczająca. Nie chodziło tutaj wyłącznie o fakt niedoszacowywania dochodów deklarowanych przez gospodarstwa domowe biorące udział w badaniach empirycznych. O wiele istotniejsze było przekonanie, że ubóstwo jest zjawiskiem wielowymiarowym i przy jego identyfikacji należałoby uwzględnić także czynniki pozamonetarne. Poglądy te znajdowały swoje odzwierciedlenie w ewolucji samej definicji kategorii ubóstwa.

Szersze spojrzenie na problem ubóstwa, niż wyłącznie przez pryzmat bieżących dochodów (wydatków), opisywało w pracach teoretycznych, jak i stosowało w praktyce wielu badaczy (PANEK, 2007). Na wielowymiarowość pojęcia ubó-

¹ Artykuł został przygotowany dzięki pomocy finansowej Unii Europejskiej w ramach projektu *Small Area Methods for Poverty and Living Conditions Estimates* (Proj. No. 217565-FP7-SSH-2007-1).

stwa wskazują m.in. autorzy raportu zawierającego rekomendacje dla Unii Europejskiej (UE), dotyczące wskaźników ubóstwa i wykluczenia społecznego.

WIELOWYMIAROWE PODEJŚCIE DO ANALIZ UBÓSTWA

Podejście wielowymiarowe pozwala na identyfikację gospodarstw domowych ubogich, a w zasadzie określenie stopnia ich zagrożenia ubóstwem, bez wyznaczania granicy (linii) ubóstwa dzielącej w sposób ostry wszystkie badane gospodarstwa na ubogie oraz nieubogie. Obok gospodarstw domowych ubogich i nieubogich wyróżniona jest dodatkowo pośrednia grupa gospodarstw o różnym stopniu zagrożenia ubóstwem.

Wielowymiarowe ujęcie ubóstwa było rozwijane w wielu pracach teoretycznych i praktycznych (Cerioli, Zani, 1990; Sen, 1992; Lovell i in., 1994; Tsui, 2002; Deutsch, Silber, 2005). W praktyce badawczej w analizie sfery ubóstwa stosowano przede wszystkim podejście wielowymiarowe oparte na teorii zbiorów rozmytych (Panek, 2001; *Fuzzy Set...*, 2006).

Przez podzbiór rozmyty A zbioru X rozumiemy uporządkowane pary $[x, \mu_A(x)]$:

$$A = \{x, \mu_A(x)\} \quad (1)$$

gdzie $x \in X$, a μ_A jest funkcją o wartościach z przedziału $[0;1]$.

Funkcja $\mu_A(x)$ jest zwana funkcją przynależności elementu x zbioru X do podzbioru rozmytego A . Wartość $\mu_A = 0$ wskazuje, że element x nie należy do podzbioru A . W sytuacji gdy $\mu_A = 1$, element x należy całkowicie do podzbioru A . Natomiast gdy zachodzi zależność $0 < \mu_A < 1$, to element x należy „częściowo” do podzbioru A . Jego przynależność do tego podzbioru jest tym słabsza, im wartość $\mu_A(x)$ jest bliższa zeru.

W podejściu klasycznym do analiz ubóstwa funkcja przynależności do sfery ubóstwa i -tego gospodarstwa domowego może być zdefiniowana następująco:

$$\mu(y_i) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } y_i < z \\ 0 & \text{gdy } y_i \geq z \end{cases} \quad (2)$$

gdzie:

y_i — dochód ekwiwalentny i -tego gospodarstwa domowego,
 z — linia ubóstwa.

WSKAŹNIKI ZASIĘGU ZAGROŻENIA UBÓSTWEM MONETARNYM

Cerioli i Zani po raz pierwszy wprowadzili pojęcie ubóstwa oparte na pojęciu funkcji przynależności do sfery ubóstwa, wykorzystując teorię zbiorów rozmytych przedstawioną przez Zadeha (1965). Funkcja przynależności do sfery ubóstwa została przez nich zdefiniowana poprzez ustalenie takiej wartości dochodów y' , że gdy gospodarstwo domowe ma dochody nie większe od tej wartości jest uznawane za całkowicie ubogie oraz takiej wartości dochodów y'' , powyżej których gospodarstwo domowe jest uznawane za całkowicie nieubogie. Przy takich założeniach funkcja przynależności do sfery ubóstwa może być zdefiniowana następująco:

$$\mu(y_i) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } 0 \leq y \leq y' \\ \frac{y'' - y}{y'' - y'} & \text{gdy } y' < y \leq y'' \\ 0 & \text{gdy } y > y'' \end{cases} \quad (3)$$

Podejście klasyczne stanowi szczególny przypadek podejścia rozmytego, w sytuacji gdy $y' = y'' = z$.

Aby uniknąć konieczności arbitralnego ustalania dwóch wartości krytycznych, Cheli i Lemmi (1995) zaproponowali tzw. podejście w pełni rozmyte i relatywne² (*Totally Fuzzy and Relative*). Zdefiniowali oni funkcję przynależności do sfery ubóstwa jako liniową transformację funkcji rozkładu dochodów $F(y_i)$ przyjmującą wartość 1 dla gospodarstwa domowego najuboższego (o najniższych dochodach ekwiwalentnych) oraz wartość 0 dla gospodarstwa domowego najbogatszego (o najwyższych dochodach ekwiwalentnych). Można to formalnie zapisać następująco:

$$\mu_i = (1 - F_i) \quad (4)$$

Wartość średnia tak zdefiniowanej funkcji przynależności (dla całej badanej populacji) jest z definicji równa 0,5.

W celu ułatwienia porównywalności wyników z wynikami analizy wielowymiarowej uzyskiwanymi w podejściu klasycznym Cheli (1995) przyjął, że funkcja (4) jest funkcją rosnącą ze względu na parametr $\alpha \geq 1$. Wzrost wartości parametru α powoduje nadawanie większej wagi najuboższym gospodarstwom domowym, czyli o najniższych dochodach. Funkcję tę nazwiemy wskaźnikiem zasięgu zagrożenia ubóstwem monetarnym (*Fuzzy Monetary Incidence — FMI*),

² Kategoria ubóstwa w podejściu relatywnym opiera się na odniesieniu poziomu zaspokojenia potrzeb gospodarstw domowych do poziomu ich zaspokojenia przez inne gospodarstwa. W drugim z podstawowych sposobów pojmowania ubóstwa, a mianowicie absolutnym, poziom zaspokojenia potrzeb gospodarstw domowych nie jest odnoszony do poziomu ich zaspokojenia przez inne gospodarstwa domowe (Panek, 2007, s. 62).

gdyż bierze on pod uwagę wyłącznie bieżącą sytuację dochodową gospodarstw domowych (wyrażaną w ujęciu monetarnym) oraz mierzy zasięg — szacowany dla całej badanej populacji (wartość średnia wskaźnika) — zagrożenia ubóstwem monetarnym (por. sposób szacunku parametru α we wzorze (5)). Możemy formalnie zapisać go następująco:

$$\mu_i = FMI_i = (1 - F_{(MI),i})^\alpha = \left(\frac{\sum_{\gamma=i+1}^n w_\gamma}{\sum_{\gamma=2}^n w_\gamma} \right)^\alpha \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \mu_n = 0 \quad (5)$$

gdzie:

- y_i — dochód (ekwiwalentny) i -tego gospodarstwa domowego,
- $F_{(MI),i}$ — wartość funkcji rozkładu dochodów $F(y_i)$ dla i -tego gospodarstwa domowego,
- w_γ — waga gospodarstwa domowego w próbie o randze (tzn. numerze miejsca zajmowanego przez i -te gospodarstwo domowe) γ w uporządkowanym rosnąco rozkładzie dochodów,
- α — parametr.

Wskaźnik ten dla i -tego gospodarstwa domowego jest po prostu odsetkiem gospodarstw domowych mniej ubogich niż i -te gospodarstwo, czyli odsetkiem gospodarstw o dochodach wyższych niż i -te gospodarstwo. Mierzy on tym samym stopień zagrożenia ubóstwem monetarnym tego gospodarstwa domowego.

Wartość parametru α może być ustalana arbitralnie. Cheli i Betti (1999) oraz Betti i Verma (1999) zaproponowali, aby szacować tę wartość tak, by wartość średnia wskaźnika FMI (dla całej badanej populacji) była równa odsetkowi ubogich (*head count ratio*) liczonemu w podejściu klasycznym według wzoru:

$$H = \frac{q}{n} \quad (6)$$

gdzie q — liczba ubogich.

Betti i Verma zaproponowali udoskonaloną wersję formuły (5) o następującej postaci:

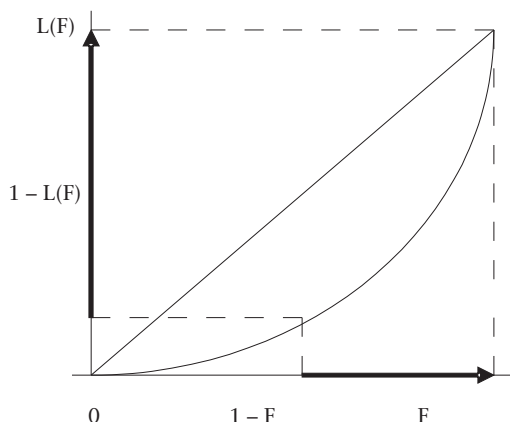
$$\mu_i = FMI_i = (1 - L_{(MI),i})^\alpha = \left(\frac{\sum_{\gamma=i+1}^n w_\gamma y_\gamma}{\sum_{\gamma=2}^n w_\gamma y_\gamma} \right)^\alpha \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \mu_n = 0 \quad (7)$$

gdzie $L_{(MI),i}$ — wartość krzywej Lorenza rozkładu dochodów $L(F(y_i))$ dla i -tego gospodarstwa domowego.

Wskaźnik ten dla i -tego gospodarstwa domowego jest udziałem dochodów gospodarstw domowych mniej ubogich niż i -te gospodarstwo domowe w dochodach badanych gospodarstw domowych ogółem, czyli udziałem dochodów gospodarstw domowych o dochodach wyższych niż i -te gospodarstwo domowe w dochodach badanych gospodarstw domowych ogółem. Szacunek parametru α odbywa się przy tym samym założeniu, jak we wzorze (5). Wartość średnia funkcji (7) jest równa $(1+G)/2$, gdzie G jest współczynnikiem Giniego rozkładu dochodów.

Sposób powiązania definicji funkcji przynależności według formuł (5) i (7) obrazuje wykres.

FUNKCJE PRZYNALEŻNOŚCI DO SFERY UBÓSTWA WEDŁUG CHELI I LEMMI (1995) ORAZ BETTI I VERMA (1999)



Źródło: opracowanie własne.

W kolejnych pracach Betti, Cheli, Lemmi i Verma (2006) zaproponowali tzw. zintegrowane rozmyte i relatywne (*Integrated Fuzzy and Relative — IFR*) podejście do definicji funkcji przynależności do sfery ubóstwa, poprzez integrację definicji funkcji przynależności do sfery ubóstwa (5) i (7). Ostatecznie wskaźnik stopnia zagrożenia ubóstwem monetarnym dla i -tego gospodarstwa domowego (FMI_i) obliczamy jako:

$$\mu_i = FMI_i = (1 - F_{(MI),i})^{\alpha-1} (1 - L_{(MI),i}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

Wskaźnik ten przyjmuje wartości z przedziału $[0;1]$. Czym większe zagrożenie ubóstwem monetarnym i -tego gospodarstwa, tym większa wartość wskaźnika.

WSKAŹNIKI ZASIĘGU ZAGROŻENIA UBÓSTWEM NIEMONETARNYM

W podejściu wielowymiarowym w analizie sfery ubóstwa uwzględniane są, poza bieżącym dochodem gospodarstw domowych, także inne, niemonetarne czynniki. Punktem wyjścia do włączenia do analiz ubóstwa dodatkowych czynników, poza bieżącym dochodem gospodarstw domowych, jest specyfikacja zmiennych, które mogą być traktowane jako symptomy ubóstwa niemonetarnego. Następnym krokiem jest określenie niemonetarnych wymiarów ubóstwa oraz przyporządkowanie do nich poszczególnych symptomów ubóstwa (Whelan i in., 2001)³. Ze względu na fakt, że niemonetarne symptomy ubóstwa mają charakter jakościowy (mierzone są na skalach nominalnych lub porządkowych), należy przyporządkować im wartości numeryczne (rangi), zdefiniować funkcję przynależności do sfery ubóstwa dla poszczególnych symptomów ubóstwa oraz dokonać ich agregacji dla poszczególnych niemonetarnych wymiarów ubóstwa oraz dla wszystkich niemonetarnych wymiarów ubóstwa łącznie.

Najprostszy schemat postępowania w zakresie przyporządkowywania rang symptomom ubóstwa i definicji funkcji przynależności do sfery ubóstwa dla tych symptomów oraz ich agregacji zaproponowali Cerioli i Zani. Jeżeli zmienna opisująca dany symptom ubóstwa ma charakter dychotomiczny⁴ (jest mierzona na skali nominalnej), to funkcja przynależności do sfery ubóstwa ze względu na tę zmienną ma postać:

$$\mu(z_{hj,i}) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } j\text{-ta zmienna z } h\text{-tego wymiaru ubóstwa wskazuje na} \\ & \text{niewystępowanie symptomu ubóstwa w } i\text{-tym gospodarstwie} \\ & \text{domowym} \\ 1 & \text{w sytuacji przeciwnej} \end{cases} \quad (9)$$

Jeżeli natomiast zmienna ma charakter polichotomiczny (mierzona jest na skali porządkowej), wariantom tej zmiennej przyporządkowywane są rangi po uprzednim uporządkowaniu tych wariantów od najwyższego do najniższego stopnia zagrożenia ubóstwem⁵ ($c_{hj,i}$). Następnie ustalana jest wartość krytyczna rangi zmiennej c'_{hj} , powyżej której ubóstwo zdecydowanie nie występuje oraz wartość krytyczna c''_{hj} , poniżej której ubóstwo zdecydowanie występuje.

³ Innym rozwiązaniem może być najpierw zdefiniowanie wymiarów ubóstwa, a następnie wybór zmiennych będących symptomami ubóstwa niemonetarnego w jego poszczególnych wymiarach.

⁴ Na przykład brak w mieszkaniu gospodarstwa domowego pewnych instalacji (np. ciepłej bieżącej wody).

⁵ Na przykład zmienna wskazująca na wielkość zadłużenia gospodarstwa domowego z powodu niewnoszenia opłat za czynsz może przyjmować kolejne liczby naturalne, odpowiednio od sytuacji największego zadłużenia do sytuacji braku zadłużenia.

Funkcja przynależności do sfery ubóstwa ze względu na dany symptom ubóstwa niemonetarnego w h -tym wymiarze definiowana jest następująco:

$$\mu(z_{hj,i}) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } c_{hj,i} < c'_{hj} \\ \frac{c'_{hj} - c_{hj,i}}{c''_{hj} - c'_{hj}} & \text{gdy } c' \leq c_{hj,i} \leq c''_{hj} \\ 0 & \text{gdy } c_{hj,i} > c''_{hj} \end{cases} \quad (10)$$

gdzie $c_{hj,i}$ — ranga wariantu j -tej zmiennej (symptomu ubóstwa) z h -tego wymiaru ubóstwa niemonetarnego dla i -tego gospodarstwa domowego.

Ceroli i Zani zaproponowali, aby wartości funkcji przynależności do sfery ubóstwa ze względu na wyróżnione w badaniu jego wymiary były obliczane zgodnie ze wzorem na średnią arytmetyczną ważoną o postaci:

$$\mu(z_{h,i}) = \frac{\sum_{j=1}^{k_h} z_{hj,i} \cdot w_{hj}}{\sum_{j=1}^{k_h} w_{hj}} \quad (11)$$

$$\text{gdzie } w_{hj} = \ln \frac{1}{\mu(z_{hj})} \quad (12)$$

$$\text{przy czym } \mu(z_{hj}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu(z_{hj,i}) \quad (13)$$

W sytuacji gdy zmienne opisujące symptomy ubóstwa mają charakter dycho-
tomiczny, średnia wartość funkcji przynależności do sfery ubóstwa (11) ze
względem na ten symptom jest równa odsetkowi gospodarstw domowych dotknię-
tych tym symptomem ubóstwa.

Zaproponowany system wag przypisuje większe znaczenie tym symptomom
ubóstwa, które rzadziej występują wśród badanych gospodarstw domowych.

Wartość funkcji przynależności do sfery ubóstwa ze względu na wszystkie
niemonetarne wymiary ubóstwa łącznie obliczamy według wzoru:

$$\mu_i = \frac{1}{h} \sum_{h=1}^m \mu(z_{h,i}) \quad (14)$$

Wskaźnik zagrożenia ubóstwem całej badanej populacji Ceroli i Zani zde-
finiowali wykorzystując własności rozmytego zbioru ubogich jako:

$$|A| = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad (15)$$

Wskaźnik ten przyjmuje wartości z przedziału $[0;1]$ i stanowi odsetek gospodarstw domowych, które należą do zbioru rozmytego ubogich:

$$P = \frac{|A|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{n} \quad (16)$$

W szczególnym przypadku, gdy funkcja przynależności przyjmuje tylko wartości 0 i 1, wskaźnik zagrożenia ubóstwem (niemonetarnym) jest tożsamy z indeksem zasięgu ubóstwa, czyli odsetkiem ubogich.

Cheli i Lemmi zaproponowali modyfikację podejścia Ceriolego i Zaniego, zastępując proste rangowanie kategorii symptomów ubóstwa ich rozkładem w badanej populacji. Przedstawiłem (Panek, 2001) dalszą modyfikację propozycji Chelego i Lemmiego, w której o całkowitej przynależności do sfery ubóstwa oraz o całkowitym pozostawaniu poza sferą ubóstwa ze względu na dany symptom decyduje przekroczenie przez opisującą go zmienną wartości progowych. Stopień przynależności do sfery ubóstwa, gdy wartość empiryczna symptomu ubóstwa znajduje się pomiędzy wartościami progowymi, zależy natomiast od rozkładu tego symptomu w badanej populacji.

Betti i Verma (1999) zaproponowali, aby zasięg zagrożenia ubóstwem niemonetarnym w populacji gospodarstw domowych mierzyć za pomocą wskaźników zasięgu zagrożenia ubóstwem niemonetarnym *FSI* (*Fuzzy Supplementary Incidence*), konstruowanych w analogiczny sposób, jak wskaźniki zasięgu zagrożenia ubóstwem monetarnym. Dla pojedynczych gospodarstw są to wskaźniki stopnia ich zagrożenia ubóstwem niemonetarnym.

Po identyfikacji zmiennych traktowanych jako symptomy ubóstwa oraz przyporządkowaniu im rang, dokonujemy ich unormowania w przedziale $[0;1]$. Unormowanie to jest przeprowadzone na podstawie dystrybucyj rozkładu wartości danego symptomu, po uporządkowaniu jego wartości według malejącego stopnia zagrożenia ubóstwem niemonetarnym (rosnących wartości rang przyporządkowanych wariantom zmiennej stanowiącej dany symptom ubóstwa niemonetarnego):

$$e_{hj,i} = \frac{1 - F(c_{hj,i})}{1 - F(1)} \quad h = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, k_h; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

gdzie:

$c_{hj,i}$ — ranga wariantu j -tej zmiennej (symptomu ubóstwa niemonetarnego) z h -tego obszaru dla i -tego gospodarstwa domowego,

- $F(c_{hj,i})$ — wartość dystrybuanty rozkładu rang j -tej zmiennej z h -tego obszaru dla i -tego gospodarstwa domowego,
- $F(1)$ — wartość dystrybuanty rozkładu rang j -tej zmiennej z h -tego obszaru dla rangi równej 1 (wariancie j -tej zmiennej wskazującego najwyższy stopień ubóstwa niemonetarnego).

Wzór (17) jest identyczny dla zmiennych typu dychotomicznego i typu polichotomicznego.

W kolejnym kroku dokonujemy agregacji ocen stopnia zagrożenia ubóstwem niemonetarnym dla każdego jego wymiaru, otrzymując zbiorczą ocenę stopnia braku zagrożenia ubóstwem niemonetarnym w h -tym wymiarze, dla gospodarstw domowych według wzoru:

$$e_{h,i} = \frac{\sum_{j=1}^{k_h} w_{hj} (1 - e_{hj,i})}{\sum_{j=1}^{k_h} w_{hj}} \quad h = 1, 2, \dots, m; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (18)$$

gdzie w_{hj} — waga j -tego symptomu ubóstwa niemonetarnego z h -tego obszaru.

Następnie dokonujemy agregacji ocen stopnia braku zagrożenia ubóstwem niemonetarnym w poszczególnych obszarach w jedną syntetyczną ocenę stopnia braku zagrożenia ubóstwem niemonetarnym dla każdego gospodarstwa domowego:

$$e_i = \frac{\sum_{h=1}^m e_{h,i}}{m} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

W kolejnym etapie procedury wyznaczamy wskaźnik stopnia zagrożenia ubóstwem niemonetarnym ogółem $FSI_{(SI),i}$ dla każdego i -tego gospodarstwa domowego, jako kombinację dwóch wskaźników stopnia zagrożenia ubóstwem niemonetarnym ogółem $(1 - F_{(SI),i})$ oraz $(1 - L_{(SI),i})$.

Wskaźnik stopnia zagrożenia ubóstwem niemonetarnym ogółem $(1 - F_{(SI),i})$ dla i -tego gospodarstwa domowego szacujemy według wzoru:

$$\mu_i = FSI_i = (1 - F_{(SI),i})^{\alpha'} = \left(\frac{\sum_{\gamma=i+1}^n w_{\gamma}}{\sum_{\gamma=2}^n w_{\gamma}} \right)^{\alpha'} \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \mu_n = 0 \quad (20)$$

gdzie:

- $F_{(SI),i}$ — wartość funkcji rozkładu ocen stopnia braku zagrożenia ubóstwem niemonetarnym ogółem $F(e_i)$ dla i -tego gospodarstwa domowego,
 w_γ — waga gospodarstwa domowego w próbie o randze (tzn. numerze miejsca zajmowanego przez i -te gospodarstwo domowe) γ w uporządkowanym rosnąco rozkładzie ocen stopnia braku zagrożenia ubóstwem niemonetarnym ogółem (e_i) ,
 α' — parametr.

Wskaźnik ten dla i -tego gospodarstwa domowego jest po prostu odsetkiem gospodarstw domowych mniej zagrożonych ubóstwem niemonetarnym niż i -te gospodarstwo domowe.

Wskaźnik stopnia zagrożenia ubóstwem niemonetarnym ogółem $(1 - L_{(SI),i})$ dla i -tego gospodarstwa domowego szacujemy według formuły:

$$\mu_i = FSI_i = (1 - L_{(SI),i})^{\alpha'} = \left(\frac{\sum_{\gamma=i+1}^n w_\gamma e_\gamma}{\sum_{\gamma=2}^n w_\gamma e_\gamma} \right)^{\alpha'} \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \mu_n = 0 \quad (21)$$

gdzie $L_{(SI),i}$ — wartość krzywej Lorenza rozkładu ocen stopnia braku zagrożenia ubóstwem niemonetarnym ogółem $L(F(e_i))$ dla i -tego gospodarstwa domowego.

Wskaźnik ten dla i -tego gospodarstwa domowego jest udziałem sumy ocen stopnia braku zagrożenia ubóstwem niemonetarnym ogółem gospodarstw domowych mniej zagrożonych ubóstwem niemonetarnym niż i -te gospodarstwo domowe w sumie ocen stopnia braku zagrożenia ubóstwem niemonetarnym badanych gospodarstw domowych ogółem.

Ostatecznie stopień zagrożenia ubóstwem niemonetarnym ogółem dla i -tego gospodarstwa domowego (FSI_i) obliczamy jako kombinację wskaźników (20) i (21):

$$\mu_i = FSI_i = (1 - F_{(SI),i})^{\alpha'-1} (1 - L_{(SI),i}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

Wartość parametru α' we wzorze (22) szacowana jest tak (podobnie jak wartość parametru α dla wskaźnika FMI), aby jego wartość średnia (dla całej badanej populacji) była równa odsetkowi ubogich gospodarstw domowych (6). Oszacowana wartość parametru α' jest następnie wykorzystana do obliczeń wskaźni-

ków stopnia zagrożenia ubóstwem niemonetarnym w poszczególnych jego wymiarach dla każdego i -tego gospodarstwa domowego:

$$\mu_{hi} = FSI_{hi} = (1 - F_{(SI),hi})^{\alpha-1} (1 - L_{(SI),hi}) \quad h = 1, 2, \dots, m; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

System wag zaproponowany przez Ceriolego i Zaniego uwzględnia wyłącznie częstotliwość występowania symptomów ubóstwa wśród badanych gospodarstw domowych. Nie bierze on natomiast pod uwagę zasobów informacyjnych poszczególnych symptomów ubóstwa, które są decydującym kryterium statystycznym przy ustalaniu systemów wag. W ocenie zasobów informacyjnych zmiennych uwzględniamy ich zdolność dyskryminacyjną, czyli zmienność względem badanych gospodarstw domowych oraz ich pojemność informacyjną (potencjał informacyjny), czyli stopień ich skorelowania z innymi zmiennymi (Panek, 2009a). Małe zróżnicowanie zmiennej wskazuje, że słabo dyskryminuje ona badane gospodarstwa domowe, a tym samym ma małą wartość dyskryminacyjną. Pojemność informacyjna zmiennej jest tym większa, im jest ona słabiej skorelowana z innymi zmiennymi (skorelowanie oznacza tutaj przenoszenie tej samej informacji).

Betti i Verma (1999) zaproponowali formułę wag dla agregacji ocen zasięgu ubóstwa niemonetarnego (17) spełniającą te kryteria statystyczne. Formuła ta ma następującą postać:

$$w_{hj} = w_{hj}^a \cdot w_{hj}^b \quad j = 1, 2, \dots, k_h; \quad h = 1, 2, \dots, m \quad (24)$$

gdzie:

w_{hj}^a — miara stopnia zróżnicowania oceny ubóstwa niemonetarnego, odpowiadającej j -temu jego symptomowi z h -tego wymiaru, wśród badanych gospodarstw domowych,

w_{hj}^b — miara stopnia skorelowania oceny ubóstwa niemonetarnego, odpowiadającej j -temu jego symptomowi z innymi ocenami ubóstwa niemonetarnego w h -tym wymiarze,

przy czym:

$$w_{hj}^a = V(e_{hj}) \quad j = 1, 2, \dots, k_h; \quad h = 1, 2, \dots, m \quad (25)$$

oraz

$$w_{hj}^b = \left(\frac{1}{1 + \sum_{j'=1}^{k_h} |r_{e_{hj},hj'}| \| r_{e_{hj},hj'} < r_{e_{hj}}^*} \right) \left(\frac{1}{\sum_{j'=1}^{k_h} |r_{e_{hj},hj'}| \| r_{e_{hj},hj'} \geq r_{e_{hj}}^*} \right) \quad (26)$$

$$j, j' = 1, 2, \dots, k_h; \quad h = 1, 2, \dots, m$$

gdzie:

- $V(e_{hj})$ — współczynnik zmienności ocen zasięgu ubóstwa niemonetarnego ze względu na jego j -ty symptom w h -tym wymiarze,
- $r_{e_{hj}, e_{hj'}}$ — współczynnik korelacji pomiędzy ocenami zasięgu ubóstwa niemonetarnego, odpowiadającymi j -temu i j' -temu symptomowi z h -tego wymiaru,
- $r_{e_{hj}}^*$ — wartość progowa współczynnika korelacji dla j -tego symptomu ubóstwa niemonetarnego w h -tym wymiarze.

Wartość progowa współczynnika korelacji może być wyznaczana na podstawie formuły minimaksowej (Panek, 2009b):

$$r_{e_{hj}}^* = \min_j \max_{j'} |r_{e_{hj}, e_{hj'}}| \quad j, j' = 1, 2, \dots, k_h; \quad j \neq j' \quad (27)$$

W przypadku symptomów typu dychotomicznego miara zróżnicowania (25) przyjmuje postać:

$$w_{hj}^a = V(e_{hj}) = \sqrt{\frac{1}{s_{hj}} - 1} \quad j = 1, 2, \dots, k_h \quad (28)$$

gdzie s_{hj} — odsetek gospodarstw domowych dotkniętych j -tym symptomem ubóstwa niemonetarnego z h -tego wymiaru.

W przypadku zmiennych typu polichotomicznego, definiowana jest ona jako:

$$w_{hj}^a = V^{(k)}(e_{hj}) \cdot k \quad j = 1, 2, \dots, k_h \quad (29)$$

gdzie k — współczynnik korygujący.

Druga składowa wagi zmiennej reprezentującej dany symptom składa się z dwóch elementów. W sytuacji gdy dana zmienna nie jest skorelowana z innymi zmiennymi reprezentującymi pozostałe symptomy ubóstwa niemonetarnego w danym wymiarze, zarówno lewy jak i prawy element składowej wagi (26) przyjmują wartość 1, a cała składowa maksymalną wartość 1. Im większe jest powielanie informacji przez daną zmienną, tym wartość tej składowej jest mniejsza od jedności. Istotną pozytywną właściwością elementu wagi (26) jest jego unormowanie w przedziale $[0;1]$. Właściwości tej nie ma pierwsza składowa wagi (24), dlatego proponuję, aby wzory (28) i (29) zastąpić następującymi formułami:

$$w_{hj}^a = \frac{\sqrt{\frac{1}{s_{hj}} - 1}}{\sum_{j=1}^{k_h} \sqrt{\frac{1}{s_{hj}} - 1}} \quad j = 1, 2, \dots, k_h \quad (30)$$

oraz

$$w_{hj}^a = \frac{V_{(e_{hj})}^{(k)}}{\sum_{j=1}^{k_h} V_{(e_{hj})}^{(k)}} \quad j = 1, 2, \dots, k_h \quad (31)$$

Przedstawiona modyfikacja nie tylko prowadzi do unormowania składowej wagi reprezentującej zdolność dyskryminacyjną zmiennej, ale także całej wagi zmiennej (24) oraz do tego samego zakresu zmienności (ważności) obu składowych tej wagi.

WSKAŹNIKI GŁĘBOKOŚCI ZAGROŻENIA UBÓSTWEM

Wskaźniki zasięgu zagrożenia ubóstwem monetarnym (*FMI*) i niemonetarnym (*FSI*) są wielowymiarowymi odpowiednikami wskaźnika odsetka ubogich. Pomijają one natomiast drugi z podstawowych aspektów analizy ubóstwa, a mianowicie głębokość zagrożenia ubóstwem. Jedną z podstawowych miar, oceniającą głębokość (natężenie) ubóstwa w podejściu klasycznym, jest indeks luki dochodowej (*poverty gap index*) definiowany jako:

$$I = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^q \left(\frac{z - y_i}{z} \right) \quad (32)$$

Na konieczność uwzględnienia w analizach sfery ubóstwa, w podejściu wielowymiarowym, aspektu głębokości zagrożenia ubóstwem wskazywali już Shorrocks i Subramanian (1994). Proponuję więc (Panek, 2009b) rozszerzenie metody *IFR* o dwa dodatkowe wskaźniki — wskaźnik mierzący głębokość ubóstwa monetarnego (*Fuzzy Monetary Depth* — *FMD*) oraz wskaźnik mierzący głębokość ubóstwa niemonetarnego (*Fuzzy Supplementary Depth* — *FSD*). Zaproponowane dwa nowe wskaźniki są szacowane przy wykorzystaniu podejścia relatywnego stosowanego w metodzie *IFR*.

ZASADY SZACUNKU WSKAŹNIKA *FMD*

Punktem wyjścia do obliczenia wskaźnika *FMD* jest wyznaczenie wartości wskaźnika luki dochodowej (monetarnej) dla każdego *i*-tego gospodarstwa domowego:

$$x_i = \frac{z - y_i}{z} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (33)$$

przy czym dla gospodarstwa domowego nieubogiego x_i (dla gospodarstw domowych, dla których $y_i \geq z$) przyjmuje on wartość zero.

Następnie wyznaczamy wartość wskaźnika braku luki dochodowej (monetarnej) u i -tego gospodarstwa domowego według wzoru:

$$d_i = 1 - x_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (34)$$

Wzrost wartości d_i wskazuje na spadek wielkości luki dochodowej, czyli podobnie jak przy operowaniu kategorią dochodów przy konstrukcji wskaźnika FMI , na poprawę sytuacji materialnej badanego i -tego ubogiego gospodarstwa domowego.

Wskaźnik FMD dla i -tego gospodarstwa domowego wyznaczany jest, analogicznie jak wskaźnik FMI , jako kombinacja liniowa wskaźnika stopnia zagrożenia luką dochodową $(1 - F_{(MD),i})$ opartego na liniowej transformacji funkcji rozkładu wskaźnika braku luki dochodowej $F(d_i)$ oraz wskaźnika stopnia zagrożenia luką dochodową $(1 - L_{(MD),i})$ będącego liniową transformacją krzywej (funkcji) Lorenza rozkładu wskaźnika braku luki dochodowej $L(F(d_i))$.

Wskaźnik stopnia zagrożenia luką dochodową $(1 - F_{(MD),i})$ dla i -tego gospodarstwa domowego obliczamy według wzoru:

$$\lambda_i = FMD_i = (1 - F_{(MD),i})^\beta = \left(\frac{\sum_{\gamma=i+1}^n w_\gamma}{\sum_{\gamma=2}^n w_\gamma} \right)^\beta \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \lambda_n = 0 \quad (35)$$

gdzie:

$F_{(MD),i}$ — wartość funkcji rozkładu wskaźnika braku luki dochodowej $F(d_i)$ dla i -tego gospodarstwa domowego,

w_γ — waga gospodarstwa domowego w próbie o randze (tzn. numerze miejsca zajmowanego przez i -te gospodarstwo domowe) γ w uporządkowanym rosnąco rozkładzie wskaźnika braku luki dochodowej (d_i) ,

β — parametr.

Wskaźnik ten dla i -tego gospodarstwa domowego jest po prostu odsetkiem gospodarstw domowych, dla których stopień braku zagrożenia luką dochodową jest wyższy niż i -tego gospodarstwa domowego.

Wskaźnik stopnia zagrożenia luką dochodową $(1 - L_{(MD),i})$ dla i -tego gospodarstwa domowego szacujemy na podstawie formuły:

$$\lambda_i = FMD_i = (1 - L_{(MD),i})^\beta = \left(\frac{\sum_{\gamma=i+1}^n w_\gamma d_\gamma}{\sum_{\gamma=2}^n w_\gamma d_\gamma} \right)^\beta \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \lambda_n = 0 \quad (36)$$

gdzie $L_{(MD),i}$ — wartość krzywej Lorenza rozkładu wskaźnika braku luki dochodowej $L(F(d_i))$ dla i -tego gospodarstwa domowego.

Wskaźnik ten dla i -tego gospodarstwa domowego jest udziałem sumy wartości wskaźników braku luki dochodowej gospodarstw domowych o wartościach wyższych (o mniejszym zagrożeniu luką dochodową) niż i -te gospodarstwo domowe w sumie wartości wskaźników braku luki dochodowej badanych gospodarstw domowych ogółem.

Ostatecznie stopień zagrożenia luką dochodową dla i -tego gospodarstwa domowego FMD_i obliczamy jako kombinację wskaźników (35) i (36):

$$\lambda_i = FMD_i = (1 - F_{(MD),i})^{\beta-1} (1 - L_{(MD),i}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (37)$$

Wartość parametru β jest szacowana tak, aby wartość średnia wskaźnika FMD_i (dla całej badanej próby) była równa luce dochodowej (*poverty gap index*) liczonej w podejściu klasycznym według wzoru (32). Wskaźnik FMD obliczany dla całej populacji gospodarstw domowych jest miarą głębokości ubóstwa monetarnego.

ZASADY SZACUNKU WSKAŹNIKA FSD

Wskaźnik FSD jest wyznaczany, podobnie jak wskaźnik FSI , za pomocą procedury wieloetapowej. Punktem wyjścia jest ten sam zbiór symptomów ubóstwa niemonetarnego (z_j ; $j = 1, 2, \dots, k_h$), w poszczególnych wymiarach deprywacji (h ; $h = 1, 2, \dots, m$), jaki został ustalony dla wyznaczenia wskaźnika FSI . Następnie wyznaczamy, dla każdego symptomu ubóstwa niemonetarnego, wskaźnik luki niemonetarnej dla każdego i -tego gospodarstwa domowego:

$$x_{hj,i} = \frac{(c_{hj} = r - 1) - (c_{hj,i} - 1)}{c_{hj} = r - 1} \quad h = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, k_h; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (38)$$

przy czym dla gospodarstwa domowego niedotkniętego ubóstwem niemonetarnym ze względu na j -ty symptom z h -tego wymiaru $x_{hj,i}$ przyjmuje wartość zero

(dla gospodarstw domowych, dla których ranga przyjmuje wartość $c_{hj,i} \geq r$; $c_{hj} = 1, 2, \dots, u$; $r \leq u$), gdzie $c_{hj} = r$ — ranga przyporządkowana wariantowi ubóstwa niemonetarnego j -tej zmiennej z h -tego wymiaru, przy którym ubóstwo niemonetarne już nie występuje.

Formuła ta jest identyczna dla symptomów ubóstwa niemonetarnego o charakterze dychotomicznym oraz o charakterze polichotomicznym.

W kolejnym kroku wyznaczamy wskaźnik braku luki niemonetarnej, dla każdego symptomu ubóstwa niemonetarnego, dla każdego i -tego gospodarstwa domowego według wzoru:

$$d_{hj,i} = 1 - x_{hj,i} \quad h = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, k_h; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (39)$$

Wzrost wartości wskaźnika (39) wskazuje na poprawę sytuacji materialnej, podobnie jak miało to miejsce dla wskaźnika (34).

Następnie dla każdego symptomu ubóstwa niemonetarnego dokonujemy oceny stopnia zagrożenia luką niemonetarną dla gospodarstw domowych, wykorzystując dystrybuantę rozkładu wartości wskaźnika braku luki niemonetarnej dla tego symptomu, po ich rosnącym uporządkowaniu:

$$g_{hj,i} = \frac{1 - F(d_{hj,i})}{1 - F(1)} \quad h = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, k_h; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (40)$$

gdzie:

- $d_{hj,i}$ — wartość wskaźnika braku luki niemonetarnej dla j -tej zmiennej (symptomu deprivacji) z h -tego obszaru dla i -tego gospodarstwa domowego,
- $F(d_{hj,i})$ — wartość dystrybuanty rozkładu wartości wskaźnika braku luki niemonetarnej j -tej zmiennej z h -tego obszaru dla i -tego gospodarstwa domowego,
- $F(1)$ — wartość dystrybuanty rozkładu wskaźnika braku luki niemonetarnej dla j -tej zmiennej z h -tego obszaru dla wartości tego wskaźnika równej 1 (wartość wskaźnika dla j -tej zmiennej wskazującego najwyższą wartość luki niemonetarnej).

W kolejnym kroku dokonujemy agregacji ocen stopnia zagrożenia luką niemonetarną dla każdego wymiaru deprivacji, otrzymując zbiorczą ocenę stopnia braku zagrożenia luką niemonetarną w h -tym wymiarze dla badanych gospodarstw domowych, według wzoru:

$$g_{h,i} = \frac{\sum_{j=1}^{k_h} w_{hj} (1 - g_{hj,i})}{\sum_{j=1}^{k_h} w_{hj}} \quad h = 1, 2, \dots, m; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (41)$$

gdzie w_{hj} — waga j -tego symptomu ubóstwa niemonetarnego z h -tego obszaru.

Wagi służące do agregacji ocen stopnia zagrożenia luką niemonetarną obliczamy analogicznie, jak przy agregacji wskaźników stopnia zagrożenia ubóstwem niemonetarnym.

Następnie dokonujemy agregacji ocen stopnia braku zagrożenia luką niemonetarną w poszczególnych obszarach w jeden syntetyczny wskaźnik stopnia braku zagrożenia luką niemonetarną ogółem dla każdego gospodarstwa domowego:

$$g_i = \frac{\sum_{h=1}^m g_{h,i}}{m} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (42)$$

W kolejnym etapie procedury wyznaczamy wskaźnik stopnia zagrożenia luką niemonetarną ogółem, dla każdego i -tego gospodarstwa domowego, jako kombinację dwóch wskaźników stopnia zagrożenia luką niemonetarną w tych wymiarach $(1 - F_{(SD),i})$ oraz $(1 - L_{(SD),i})$.

Wskaźnik stopnia zagrożenia luką niemonetarną ogółem $(1 - F_{(SD),i})$ dla i -tego gospodarstwa domowego szacujemy według wzoru:

$$\lambda_i = FSD_i = (1 - F_{(SD),i})^{\beta'} = \left(\frac{\sum_{\gamma=i+1}^n w_{\gamma}}{\sum_{\gamma=2}^n w_{\gamma}} \right)^{\beta'} \quad \lambda_n = 0 \quad (43)$$

gdzie:

- $F_{(SD),i}$ — wartość funkcji rozkładu ocen braku zagrożenia luką niemonetarną ogółem $F(g_i)$ dla i -tego gospodarstwa domowego,
- W_{γ} — waga gospodarstwa domowego w próbie o randze (tzn. numerze miejsca zajmowanego przez i -te gospodarstwo domowe) γ w uporządkowanym rosnąco rozkładzie ocen stopnia braku zagrożenia luką niemonetarną ogółem (g_i) ,
- β' — parametr.

Wskaźnik ten dla i -tego gospodarstwa domowego jest po prostu odsetkiem gospodarstw domowych mniej zagrożonych luką niemonetarną ogółem niż i -te gospodarstwo domowe.

Wskaźnik stopnia zagrożenia luką niemonetarną ogółem $(1 - L_{(SD),i})$ dla i -tego gospodarstwa domowego szacujemy na podstawie formuły:

$$\lambda_i = FSD_i = (1 - L_{(SD),i})^\beta = \left(\frac{\sum_{\gamma=i+1}^n w_\gamma g_\gamma}{\sum_{\gamma=2}^n w_\gamma g_\gamma} \right)^{\beta'} \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \lambda_n = 0 \quad (44)$$

gdzie $L_{(SD),i}$ — wartość krzywej Lorenza rozkładu ocen stopnia braku zagrożenia luką niemonetarną ogółem $L(F(g_i))$ dla i -tego gospodarstwa domowego.

Wskaźnik ten dla i -tego gospodarstwa domowego jest udziałem sumy ocen stopnia braku zagrożenia luką niemonetarną ogółem gospodarstw domowych mniej zagrożonych luką niemonetarną niż i -te gospodarstwo domowe w sumie ocen stopnia braku zagrożenia luką niemonetarną badanych gospodarstw domowych ogółem.

Ostatecznie stopień zagrożenia luką niemonetarną ogółem i -tej osoby (FSD_{hi}) obliczamy jako kombinację wskaźników (43) i (44):

$$\lambda_i = FSD_i = (1 - F_{(SD),i})^{\beta'-1} (1 - L_{(SD),i}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (45)$$

Wartość parametru β' we wzorze (39) szacowana jest tak, podobnie jak wartość parametru β dla wskaźnika FMD , aby jego wartość średnia (dla całej badanej populacji) była równa indeksowi luki dochodowej (32). Oszacowana wartość parametru β' jest następnie wykorzystywana do obliczeń wskaźników stopnia zagrożenia luką niemonetarną w poszczególnych jej wymiarach, dla każdego i -tego gospodarstwa domowego:

$$\lambda_{hi} = FSD_{hi} = (1 - F_{(SD),hi})^{\beta'-1} (1 - L_{(SD),hi}) \quad h = 1, 2, \dots, m; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (46)$$

Wskaźniki FSD oraz FSD_h obliczane dla całej populacji gospodarstw domowych (ich wartości średnie) są miarami głębokości ubóstwa niemonetarnego.

LITERATURA

- Betti G., Verma V. (1999), *Measuring the degree of poverty in a dynamic and comparative context: a multidimensional approach using fuzzy set theory*, „Proceedings”, ICCS-VI, vol. 11, Lahore, Pakistan, August 27—31
- Betti G., Cheli B., Lemmi A., Verma V. (2006), *Multidimensional and Longitudinal Poverty: an Integrated Fuzzy Approach*, [w:] *Fuzzy Set Approach to Multidimensional Poverty Measurement*, praca zbiorowa, red. A. Lemmi i G. Betti, Springer, New York
- Ceroli A., Zani S. (1990), *A fuzzy approach to the measurement of poverty. Income and wealth distribution, inequality and poverty*, praca zbiorowa pod red. C. Dagum, M. Zenga, Springer Verlag, Berlin
- Cheli B. (1995), *Totally Fuzzy and Relative Measures of Poverty in Dynamics Context*, „Metron”, No. 53 (1)
- Cheli B., Lemmi A. (1995), *A Totally Fuzzy and Relative Approach to the Multidimensional Analysis of Poverty*, „Economic Notes”, No. 24
- Cheli B., Betti G. (1999), *Fuzzy Analysis of Poverty Dynamics on an Italian Pseudo Panel, 1985—1994*, „Metron”, No. 57
- Deutsch J., Silber J. (2005), *Measuring multidimensional poverty: An empirical comparison of various approaches*, „Review of Income and Wealth”, vol. 51(1)
- Fuzzy Set Approach to Multidimensional Poverty Measurement* (2006), praca zbiorowa pod red. A. Lemmi i G. Betti, Springer, New York
- Lovell C. A. K., Richardson S., Travers P., Wood L. (1994), *Resources and Functionings: A New View of Inequality in Australia*, [w:] *Models and Measurement of Welfare and Inequality*, praca zbiorowa pod red. W. Eichhorn, Springer-Verlag, Heidelberg
- Panek T. (2001), *Wymiary ubóstwa w Polsce w latach 1996—1999*, „Wiadomości Statystyczne”, nr 11
- Panek T. (2007), *Ubóstwo i nierówności*, [w:] *Statystyka społeczna*, praca zbiorowa pod red. T. Panka, PWE, Warszawa
- Panek T. (2009a), *Statystyczne metody wielowymiarowej analizy porównawczej*, SGH, Warszawa
- Panek T. (2009b), *Zasady szacunku wskaźników do oceny wielowymiarowej ubóstwa i deprivacji w ramach projektu SAMPLE*, SGH, Warszawa
- Sen A. K. (1992), *Inequality examined*, Clarendon Press, Oxford
- Shorrocks A. F., Subramanian S. (1994), *Fuzzy poverty indices*, mimeo, University of Essex
- Tsui K. Y. (2002), *Multidimensional poverty indices*, „Social Choice and Welfare”, vol. 19(1)
- Whelan C. T., Layte R., Maitre B., Nolan B. (2001), *Income, deprivation and economic strain: an analysis of the European Community Household Panel*, „European Sociological Review”, No. 17
- Zadeh L. A. (1965), *Fuzzy sets*, „Information and Control”, No. 8

SUMMARY

A methodology for multi-dimensional assessment of poverty is presented in this paper. In this approach the assessment of the households needs is effected not only from the viewpoint current incomes (expenditures) but non-monetary factors are also taken into consideration. The multi-dimensional approach has been based on the theory of fuzzy sets in which the conventional poor/non-poor